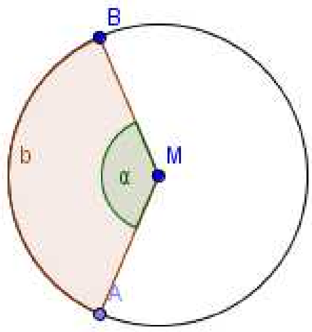
Grundwissen Mathematik 10.Klasse
Gymnasium SOB

1.Kreiszahl π

1.1.Kreis



- Länge des Kreisbogens $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$
- Fläche des Kreissektors $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$
- Das Bogenmaß b eines Winkels α ist die Länge der zugehörigen Bogenlänge b im Kreis mit dem Radius 1.
- Umrechnung: $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi$ wobei b der Winkel im Bogenmaß zum Winkel α im Gradmaß ist.
- Besondere Werte:

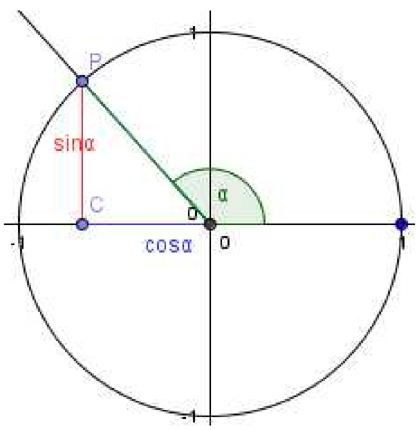
α	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
b	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

1.2.Kugel

- Kugeloberfläche: $O_K = 4\pi \cdot r^2$
- Kugelvolumen: $V_K = 4/3\pi \cdot r^3$

2.Geometrische und funktionale Aspekte

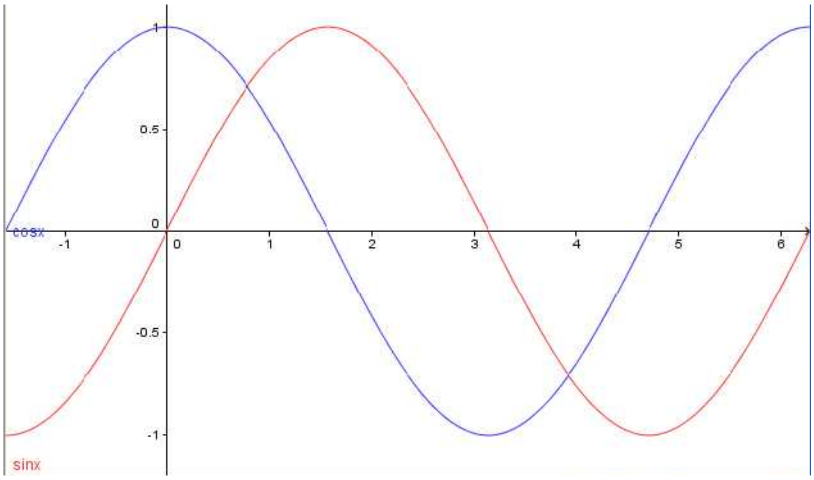
2.1.Sinus und Kosinus am Einheitskreis



- Definition: Ist P(x/y) ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreis und α der Winkel mit der positiven Halbachse als erstem und der Halbgeraden von O durch P als zweitem Schenkel, so legt man fest: sin α = y und cos α = x.
- Die Sinuswerte sind im I. und II. Quadranten positiv, im III. und IV. Quadranten negativ.
- Die Kosinuswerte sind im I. und IV. Quadranten positiv, im II. und III. Quadranten negativ.
- Besondere Beziehungen:
  sin (180° - α) = sin α, sin (180° + α) = -sin α ,
  sin (360° - α) = -sin α, cos (180° - α) = -cos α,
  cos (180° + α) = -cos α, cos (360° - α) = cos α.
- Alle anderen Winkel (> 360° und negative Winkel) lassen sich durch mehrfache Addition und Subtraktion von 360° auf einen Winkel zwischen 0° und 360° zurückführen.

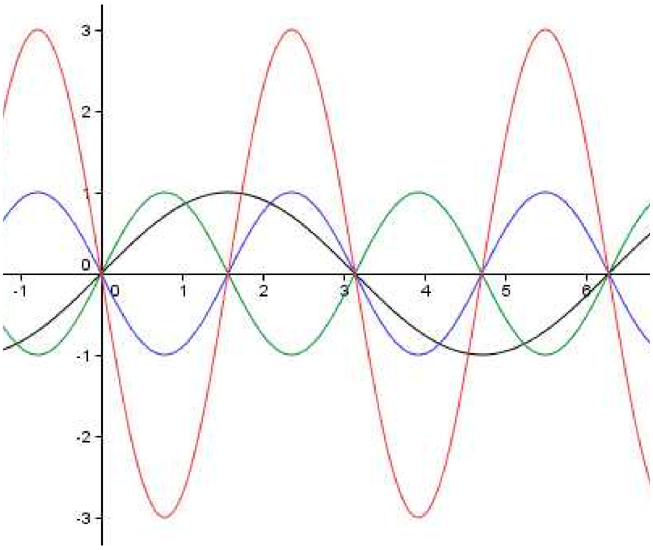
2.2.Sinus- und Kosinusfunktion

- Graphen:
- Periode: $2\pi \approx 6{,}28$
- **W** = [-1;1]
- sin x ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- cos x ist achsensymmetrisch zur y- Achse

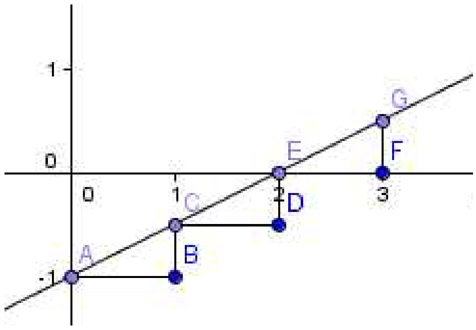


2.3.Die allgemeine Sinusfunktion $x \mapsto a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin[b(x + c/b)]$

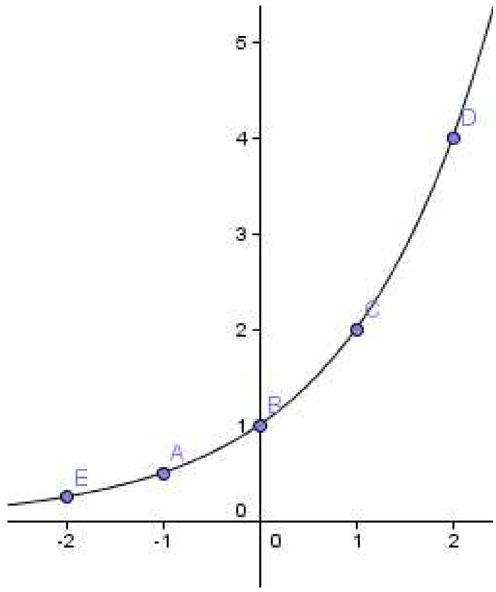
- Beispiel: $f(x) = 3 \sin(2x + \pi) = 3 \sin[2(x + \pi/2)]$
- schwarz: Ausgangskurve sin x
- grün: Stauchung um den Faktor 2 in x –Richtung woraus die neue Periode $2\pi / 2 = \pi$ folgt.
- blau: Verschiebung um $c/b = \pi/2$ nach links bzw. für $c < 0$ nach rechts.
- rot: Streckung mit dem Faktor 3 in y – Richtung.
- Falls a oder b negativ sind, bewirkt dies zusätzlich eine Spiegelung an der x – Achse.



3.Exponentielles Wachstum und Logarithmieren



- Lineares und exponentielles Wachstum: Bei linearem Wachstum vergrößert sich der y – Wert bei Zunahme des x – Wertes um beispielsweise 1 immer um den gleichen Wert.
- Die graphische Darstellung von $g(x) = 0,5x - 1$ liefert eine Gerade mit konstanter Steigung 0,5.
- Beim exponentiellen Wachstum wird der momentane Funktionswert immer mit dem gleichen Faktor multipliziert, wenn der x – Wert um einen konstanten Wert zunimmt.



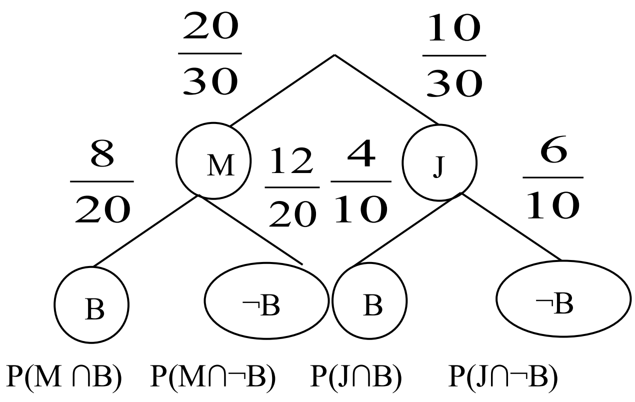
- Die graphische Darstellung von $y = 2^x$ zeigt, dass bei Erhöhung von x um 1 der y – Wert jeweils verdoppelt wird.
- Funktionen der Form f: $x \mapsto b \cdot a^x$ (x aus **R**) heißen Exponentialfunktionen. Die Konstante a gibt den Wachstumsfaktor an. Es muss gelten: $a > 0$; $a \neq 1$. Für $a > 1$ steigt der Graph, für $a < 1$ fällt er. Die x –Achse ist Asymptote. Die Konstante b gibt den Anfangswert der Funktion für x = 0 an, also ist f(0) = b. Ist b < 0 so wird der Graph noch zusätzlich an der x – Achse gespiegelt.
- Die eindeutige Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ (für $a > 0$, $a \neq 1$ und $b > 0$) bezeichnet man als **Logarithmus von b zur Basis a** und schreibt $x = \log_a b$. $\log_a b$ ist diejenige Zahl mit der man a potenzieren muss um b zu erhalten.
- Rechenregeln:
  $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
  $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$
  $\log_a(u^x) = x \cdot \log_a(u)$
  $\log_a(u) = \lg u / \lg a$ (Umrechnung des Logarithmus)
- Anwendung Exponentialgleichungen: die Unbekannte tritt im Exponenten auf.
- Beispiel 1:
  $2 \cdot 5^x = 4 \cdot 2^x$ | : 2 und : 2^x
  $2,5^x = 2$ | Logarithmieren
  $x = \log_{2,5} 2 \approx 0,756$
- Beispiel 2:
  $5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6$ | Substitution $u = 5^x$
  $5 \cdot u + u^{-1} = 6$
  $5 \cdot u^2 + 1 - 6u = 0$ | Lösungsformel
  $$u_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm 4}{10}$$
  $$u_1 = 1 : 5^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$$
  $$u_2 = \frac{1}{5} : 5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow x_2 = -1$$
  Probe: Beide Ergebnisse sind Lösungen.

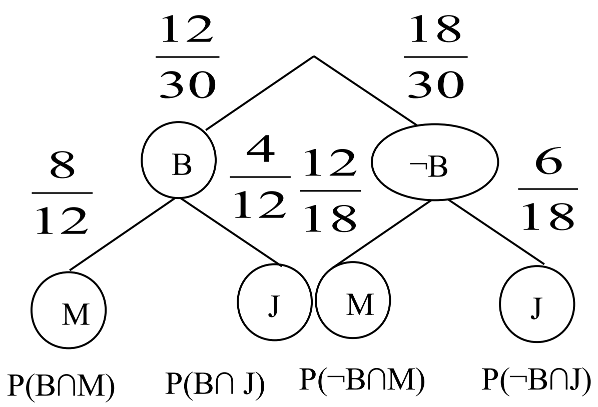
4.Zusammengesetzte Zufallsexperimente

- Beispiel: In einer Klasse aus 30 Schülern sind 20 Mädchen und 10 Jungen. Insgesamt tragen 12 Kinder eine Brille, davon 4 Jungen.
- Bezeichnet man das Ereignis Mädchen mit M, das Ereignis Jungen mit $\overline{M}$ = J, das Ereignis Brillenträger mit B und das Gegenereignis mit $\overline{B} = \neg B$, so bilden die Schnittmengen $M \cap B$, $M \cap \overline{B}$, $\overline{M} \cap B$ und $\overline{M} \cap \overline{B}$ eine Zerlegung des Ergebnisraumes, d.h. die Schnittmengen haben kein gemeinsames Element und ihre Vereinigung ergibt Ω.
- Der Sachverhalt kann damit gut in einer **Vierfeldertafel** dargestellt werden.

	M	$\overline{M}$	
B	8 = $\lvert M \cap B \rvert$	4 = $\lvert \overline{M} \cap B \rvert$	12
$\overline{B}$	12 = $\lvert M \cap \overline{B} \rvert$	6 = $\lvert \overline{M} \cap \overline{B} \rvert$	18
	20	10	30 = $\lvert \Omega \rvert$

- Die Anzahl der Elemente von M , $\overline{M}$, B, $\overline{B}$ treten als Spaltensummen bzw. als Zeilensummen auf.
- Obiges Zufallsexperiment kann auch in einem Baumdiagramm veranschaulicht werden, wobei zu unterscheiden ist, ob man erst nach M oder nach B sucht.





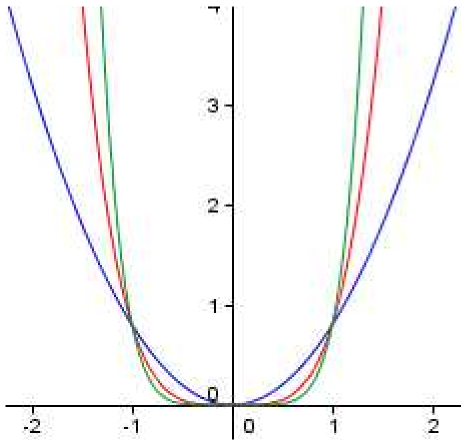
- Im Baumdiagramm findet man am Pfadende die Wahrscheinlichkeiten der die Zerlegung bildenden Schnittmengen der Vierfeldertafel.

- Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$ so versteht man unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B unter der Bedingung des Eintretens von A. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- Im Baumdiagramm findet man in der zweiten Stufe die bedingten Wahrscheinlichkeiten, z.B. $P_M(B) = \dfrac{P(M \cap B)}{P(M)} = \dfrac{8/30}{20/30} = \dfrac{8}{20}$ dagegen ist

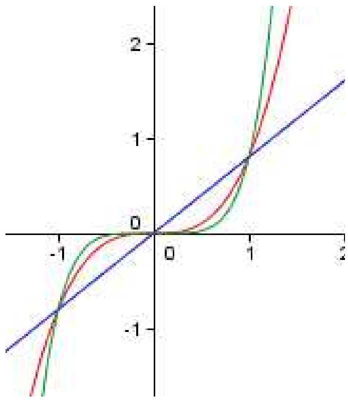
$$P_B(M) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{8/30}{12/30} = \frac{8}{12}$$

5.Ausbau der Funktionenlehre

5.1.Potenzfunktionen



- Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot x^n$ (n aus **N**) nennt man Potenzfunktionen n – ten Grades.
- Die geraden Funktionen $x \mapsto 0{,}8 \cdot x^2$ $x \mapsto 0{,}8 \cdot x^4$ $x \mapsto 0{,}8 \cdot x^6$ ... dargestellt im Koordinatensystem:
- Für negative x-Werte nehmen die y-Werte mit wachsenden x ab, für $x > 0$ nehmen die y-Werte mit wachsendem x zu. $\mathbf{W} = \mathbf{R}_0^+$
- Ein negativer Vorfaktor a bewirkt eine Spiegelung an der x – Achse. Für negative x-Werte nehmen die y-Werte mit wachsenden x nun zu, für $x > 0$ nehmen die y-Werte mit wachsendem x ab. $\mathbf{W} = \mathbf{R}_0^-$
- Die Graphen für Potenzfunktionen gerader Ordnung sind achsensymmetrisch zur y – Achse.

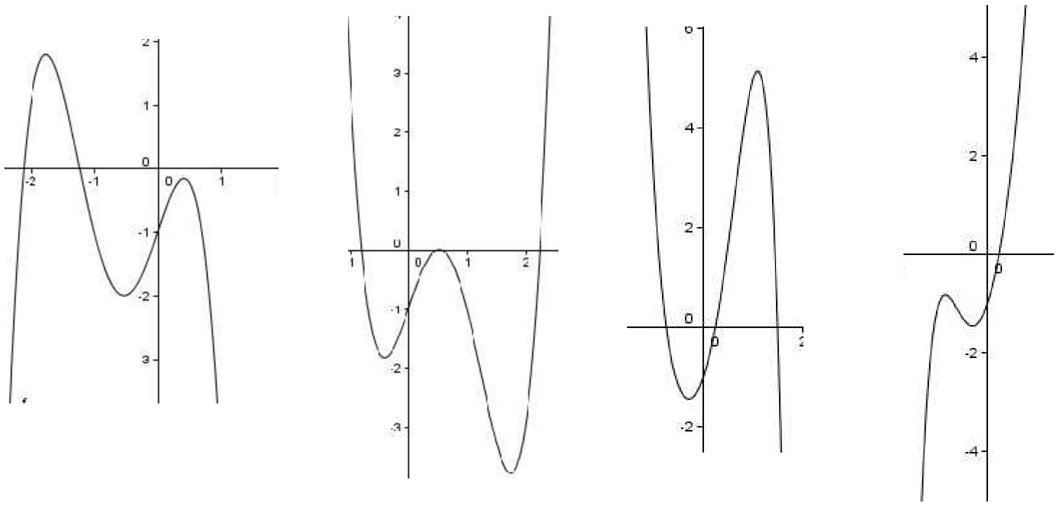


x

- Die ungeraden Funktionen $x \mapsto 0{,}8 \cdot x$ $x \mapsto 0{,}8 \cdot x^3$ $x \mapsto 0{,}8 \cdot x^5$ ... dargestellt im Koordinatensystem:
- Für alle x-Werte nehmen die y-Werte mit wachsenden zu. $\mathbf{W} = \mathbf{R}$
- Ein negativer Vorfaktor a bewirkt eine Spiegelung an der x – Achse. Für alle x-Werte nehmen die y-Werte mit wachsenden x nun ab. $\mathbf{W} = \mathbf{R}$
- Die Graphen für Potenzfunktionen ungerader Ordnung sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

5.2.Ganzrationale Funktionen

- Terme wie z.B. $-5x^6 + 3x^4 + x^3 - x + 6$, die aus Summen von Potenzen (mit Exponenten aus $\mathbf{N_0}$) derselben Variablen und zugehörigen Koeffizienten (Vorfaktoren) bestehen, nennt man Polynome. Der höchste in einem Polynom bei einer Variablen vorkommende Exponent heißt Grad des Polynoms. Eine Funktion $x \mapsto p(x)$, deren Funktionsterm ein Polynom ist, heißt ganzrationale Funktion. Der Grad des Polynoms wird auch als Grad der ganzrationalen Funktion bezeichnet.
- Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion wird für betragsmäßig große Werte durch den Summanden mit dem höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt.
- Die vier verschiedenen Fälle werden anhand von Beispielen betrachtet:
  Beispiel 1: $x \mapsto \mathbf{2x^4} - 5x^3 + 3x - 1$ läuft „von links oben nach rechts oben“
  Beispiel 2: $x \mapsto \mathbf{-2x^4} - 5x^3 + 3x - 1$ läuft „von links unten nach rechts unten“
  Beispiel 3: $x \mapsto \mathbf{-2x^5} + 5x^2 + 3x - 1$ läuft „von links oben nach rechts unten“
  Beispiel 4: $x \mapsto \mathbf{2x^5} + 5x^2 + 3x - 1$ läuft „von links unten nach rechts oben“



- Polynomdivision: Polynome dividiert man wie Zahlen.
- Beispiel:

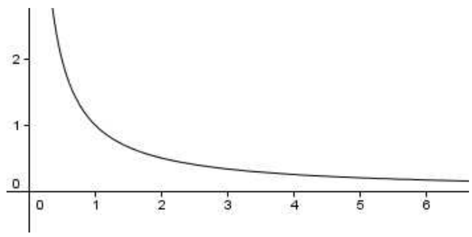
$$
\begin{array}{l}
(5x^2 + 7x + 2) : (x + 1) = 5x + 2 \\
\underline{-(5x^2 + 5x)} \\
\qquad 2x + 2 \\
\quad \underline{-(2x + 2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

- Ist a eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n, dann lässt sich f(x) in der Form $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$ schreiben. g(x) ist dabei ein Polynom vom Grand $n - 1$.
- Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.
- Nullstellenermittlung und Faktorisierung einer Polynomfunktion:
  Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x + 2$
  1.Schritt: Erraten einer Nullstelle (probiere Teiler des konstanten Glieds) z.B. $x_1 = 1$
  2.Schritt: $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 3x$
  3.Schritt: Bestimme die weiteren Nullstellen von $x^2 + x - 3x$: $x_2 = 1$ und $x_3 = -2$
  4.Schritt: $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$
- Liegt eine Nullstelle ungerader Ordnung vor (Exponent des Linearfaktors ist ungerade) so findet ein Vorzeichenwechsel der Funktion statt, bei ungerader Ordnung nicht.

5.3.Vertiefen der Funktionenlehre

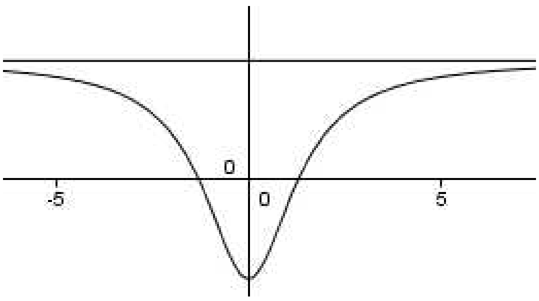
- Überblick über die bisher bekannten Funktionstypen:
    1. Lineare Funktionen
    2. Quadratische Funktionen
    3. Ganzrationale Funktionen
    4. Gebrochen rationale Funktionen
    5. Exponentialfunktionen
    6. Trigonometrische Funktionen

- Achsensymmetrie: Gleich weit vom Nullpunkt entfernte x – Werte besitzen stets den gleichen Funktionswert: **f(x) = f(-x)**
- Punktsymmetrie: Gleich weit vom Nullpunkt entfernte x – Werte besitzen stets den betragsmäßig gleichen Funktionswertaber verschiedene Vorzeichen: **f(x) = -f(-x)**
- Konvergenz: Kommen die Funktionswerte f(x) einer Funktion für beliebig groß werdende x –Werte einer Zahl a beliebig nahe, so nennt man a den Grenzwert der Funktion für x gegen plus unendlich (x →+ ∞). Schreibweise: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$. Die Gerade y = a ist waagrechte Asymptote des Graphen von f. Entsprechend ist der Grenzwert einer Funktion f für x → - ∞ definiert.



- Beispiel: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- Zur Bestimmung des Grenzwertes einer gebrochen rationalen Funktion teilt man jedes Glied des Zählers und des Nenners durch die höchste Nennerpotenz:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 3$$



- Funktionen die keinen Grenzwert für x gegen plus oder minus unendlich besitzen heißen divergent. Ganzrationale Funktionen vom Grad > 0 sind grundsätzlich divergent. Entscheidend ist dabei wieder die Potenz mit dem höchsten Exponenten (siehe 5.2)
- Verschieben, Strecken und Spiegeln von Funktionsgraphen: f(x) = a · g(b(x - c)) + d

    a : Streckung bzw. Stauchung in y – Richtung
    b : Streckung bzw. Stauchung in x – Richtung
    c : Verschiebung in x – Richtung
    d : Verschiebung in y – Richtung

    Multiplikation der Funktionswerte mit (-1) bewirkt eine Achsenspiegelung an der x – Achse. g(x) = - f(x) bedeutet, dass die Graphen von g und f achsensymmetrisch zur x –Achse sind.

    g(x) = f(-x) bedeutet, dass die Graphen von g und f achsensymmetrisch zur y–Achse sind.