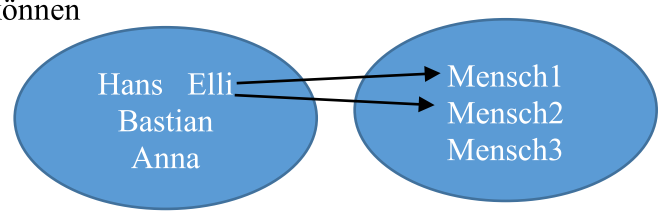
Grundwissen Mathematik 8.Klasse
Gymnasium SOB

1.Funktion und Term

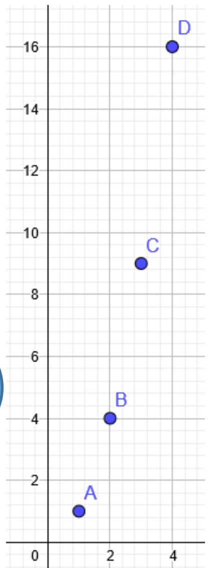
1.1.Zuordnung

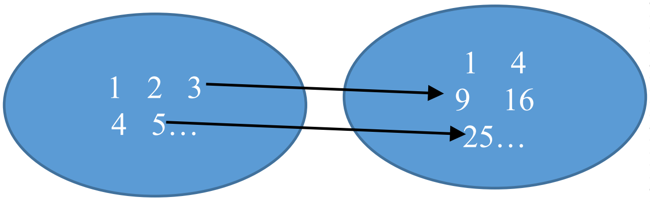
- Eine Zuordnung weist einem Element einer Menge ein oder mehrere Elemente einer anderen Menge zu. Zuordnungen können durch Tabellen, Diagramme oder durch Terme beschrieben werden.
- Beispiel: Der Vorname Elli kann mehreren Menschen (Hunden, usw.) zugeordnet werden.



1.2.Funktion

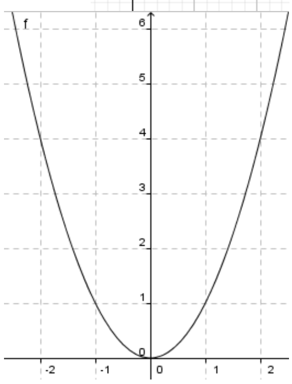
- Definition: Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem x-Wert genau einen y –Wert zuordnet, heißt Funktion. Schreibweisen: $x \mapsto f(x)$ oder $x \mapsto y$ oder $y = f(x)$, wobei mit $f(x)$ der Funktionswert gemeint ist.
- Die Menge der zulässigen x-Werte heißt Definitionsmenge D, die Menge aller auftretenden y-Werte Wertemenge W.
- Eine Funktion lässt sich mit einer Wertetabelle, einer Funktionsgleichung oder durch einen Funktionsgraphen darstellen.
- Beispiel1: „Jeder Person wird ihr Geburtsdatum zugeordnet“ ist eine Funktion, da die Person nicht mehrere Geburtsdaten haben kann.
- Beispiel2: „Jeder natürlichen Funktion wird ihre Quadratzahl zugeordnet“ ist ebenfalls eindeutig und damit eine Funktion. Darstellung als Graph, als Funktionsgleichung $f(x) = y = x^2$ mit D = **N** und in Tabellenform:



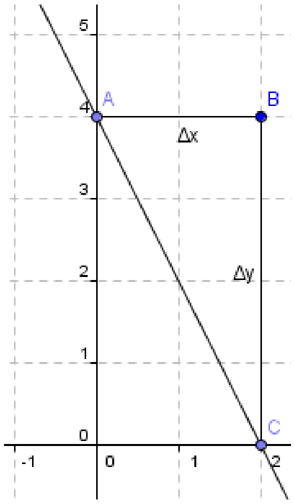


x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

-
- Beispiel: $x \mapsto f(x)$ oder $x \mapsto x^2$ oder $f(x) = x^2$ oder $y = x^2$ mit der Definitionsmenge **Q** und der Wertemenge $\mathbf{Q}^+_0$ ist ebenfalls eine Funktion, da jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird.



1.3.Lineare Funktionen

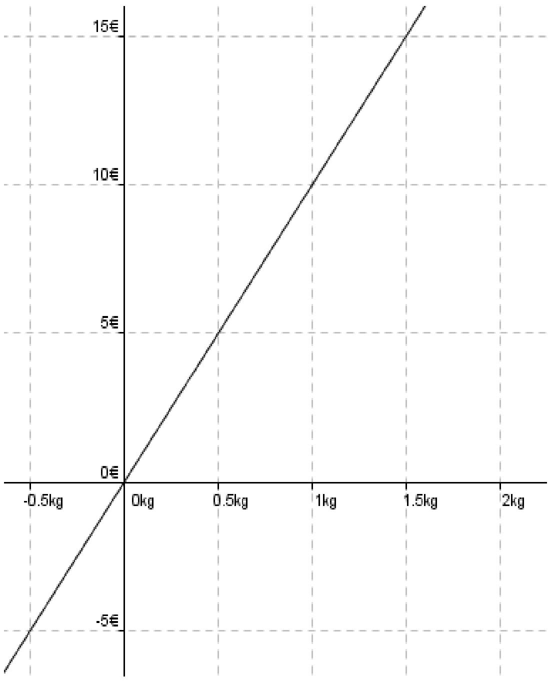


- Definition: Eine Funktion $x \mapsto mx + t$ wird lineare

Funktion genannt, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Steigung und t der y – Achsenabschnitt.

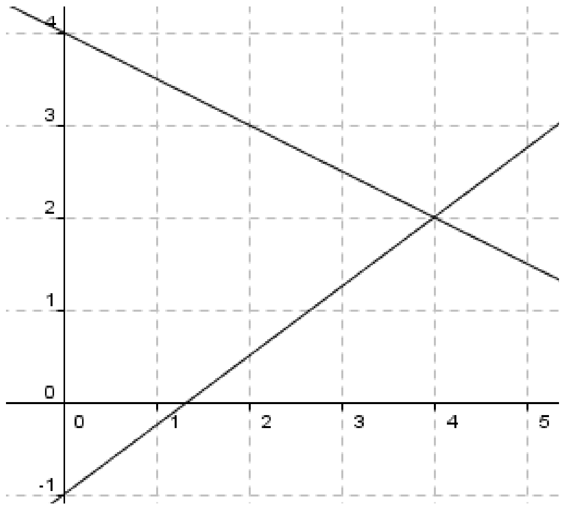
- Beispiel: y = - 2x + 4
- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$
- t kann direkt aus der Zeichnung als Schnittpunkt mit der y-Achse abgelesen werden.
- Den Schnittpunkt mit der x-Achse bezeichnet man als Nullstelle.
- Eine Geradengleichung kann aus zwei Punkten aufgestellt werden. Dazu berechnet man erst die Steigung m und setzt in die entstehende Gleichung einen der beiden Punkte ein um t zu erhalten.
- Beispiel: A(2/3), B(6/1). $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-1}{2-6} = \frac{2}{-4}$. y= -1/2 x + t ergibt für a eingesetzt 3 = -1/2 · 2 + t. Damit erhält man für t = 4. Die Funktion hat damit die Gestalt $x \mapsto -1/2\ x + 4$.
- Lineare Ungleichungen werden schrittweise genau so gelöst wie lineare Gleichungen, bei der Multiplikation bzw. der Division mit einer negativen Zahl dreht sich jedoch das Ungleichheitszeichen um.
- Beispiel:

$$
\begin{array}{ll}
-25\,x - 1 > -51 & |+1 \\
-25\,x > -50 & |:(-25) \\
x < 2 & \\
L =]-\infty; 2[&
\end{array}
$$



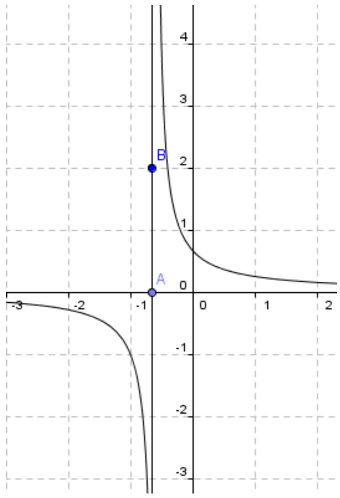
- Ändern sich bei einer Zuordnung die beiden Größen im gleichen Verhältnis, so erhält man den Spezialfall einer **direkten Proportionalität.** Anders ausgedrückt: der Quotient der beiden Größen bleibt konstant. Die graphische Darstellung im Koordinatensystem ergibt eine Ursprungsgerade.
- Beispiel: 100g Salami kosten 1€, 200g kosten 2€, 40g kosten 0,40€. Der Masse m wird der Preis p zugeordnet. Es handelt sich um eine direkte Proportionalität mit der Zuordnungsvorschrift $m \mapsto p$ oder $m \mapsto c \cdot m$ mit c als Proportionalitätskonstanten $c = \frac{p}{m} = \frac{1€}{100g} = \frac{10€}{1kg}$
- Darstellung im Koordinatensystem:

1.4.Lineare Gleichungssysteme



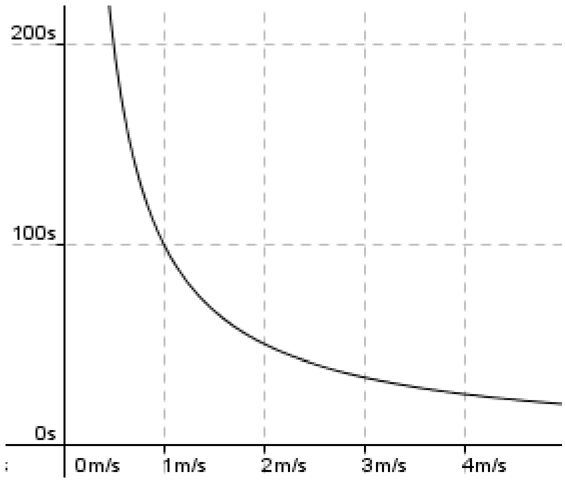
- Beispiel: Gleichung I: $x + 2y = 8$
  Gleichung II: $3x - 4y = 4$
- Graphische Lösung: Der Schnittpunkt S der beiden Geraden hat die Koordinaten (4/2).
- Einsetzverfahren:
  I: $x + 2y = 8$
  II: $3x - 4y = 4$
  I': $x = 8 – 2y$
  in II: $3(8-2y) – 4y = 4$
  $24 – 10y = 4$
  $y = 2$
  $x = 8 – 2 \cdot 2 = 4$
- Additionsverfahren: $2 \cdot \text{I} + \text{II}$
  $2x + 3x = 16 + 4$
  $5x = 20$
  $x =4$
  in I: $4 + 2y = 8$
  $y = 2$
- Gleichsetzungsverfahren:
  I: $y = 4 - 0{,}5x$
  II: $y = -1 + 0{,}75x$
  $4 - 0{,}5x = -1 + 0{,}75x$
  $5 = 1{,}25x$
  $x = 4 \Longrightarrow y = 2$

2.Elementar gebrochen-rationale Funktionen



- Terme bei denen im Nenner eine Variable auftritt heißen Bruchterme. Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, heißen gebrochen rationale Funktionen. Da der Nenner nie 0 sein darf, müssen alle Zahlen für die der Nenner 0 wird aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.
- Beispiel: $x \mapsto \frac{2}{5x+3}$ $\mathbf{D} = \mathbf{Q} \mid \{-3/5\}$
- Stellen, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden, nennt man Definitionslücken.
- Geraden, an die sich der Graph beliebig genau annähert, nennt man senkrechte bzw. waagrechte Asymptoten. Im Beispiel handelt es sich um die x-Achse als waagrechte Asymptote und die Parallele zur y-Achse x = -0,6 als senkrechte Asymptote.

- Beim Spezialfall der **indirekten Proportionalität** $x \longmapsto y$ gilt: Wird x n – mal so groß, so muss y durch n geteilt werden. Das Produkt aus x und y bleibt also gleich, man spricht auch von Produktgleichheit. Die Zuordnungsvorschrift lautet $x \mapsto \frac{c}{x}$, wobei $c = x \cdot y$ gilt.
- Beispiel: Für die Strecke s = 100m benötigt man die Zeit t =10s bei einer Geschwindigkeit v von 10m/s. Hier sind t und v indirekt proportional mit der Zuordnungsvorschrift $t \mapsto \frac{100m}{v}$.
- Darstellung im Koordinatensystem:
- Der Graph heißt Hyperbel.



- Beim **Rechnen mit Bruchtermen** geht man vor wie beim Rechnen mit Brüchen. Beim Addieren bzw. Subtrahieren von Bruchtermen muss eventuell vorher der Hauptnenner ermittelt werden.
- Beispiel: $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} - \frac{3x}{(x-1)x} = \frac{2x-2-3x)}{x(x-1)} = \frac{-x-2}{x(x-1)}$
- Um den Schnittpunkt zweier Hyperbeln bestimmen zu können, stellt man eine Gleichung auf, in der auf beiden Seiten ein Bruchterm erscheint. Zur Lösung der Gleichung multipliziert man beide Seiten mit dem Hauptnenner aller vorkommenden Bruchterme.
- Beispiel: Die Definitionsmenge für die folgende Bruchgleichung lautet: **D** = **Q**|{2}

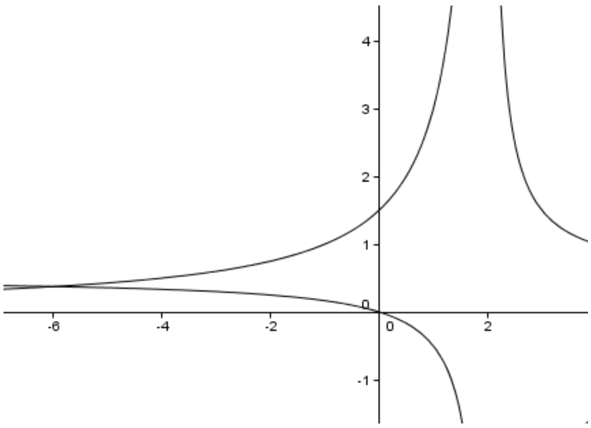
$\frac{3}{2-x} = \frac{x}{2x-4}$ | · Hauptnenner: -2(2-x)

$\frac{3 \cdot (-2) \cdot (2-x)}{(2-x)} = \frac{x \cdot (-2) \cdot (2-x)}{(-2) \cdot (2-x)}$ | Kürzen

$-6 = x$

Die Probe durch Einsetzen liefert für die linke und die rechte Seite 3/8.

- Graphische Lösung:

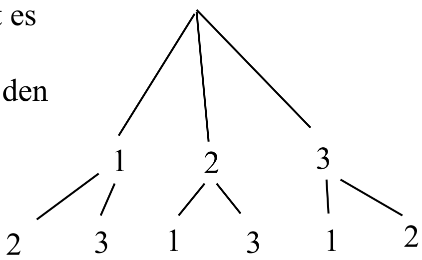


3.Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

- Definition: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ und $a^0 = 1$ für jede rationale Zahl $a \neq 0$
- Rechengesetze: $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$
  $a^n : a^k = a^{n-k}$
  $(a^n)^m = a^{nm}$
  $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
  $(a:b)^n = a^n : b^n$

4.Stochastik: Laplace-Experimente

- Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt Ergebnismenge oder Ergebnisraum **Ω**.
- Beispiel einmaliger Würfelwurf: **Ω** ={1,2,3,4,5,6,}
- Ein Ereignis ist eine Teilmenge des Ergebnisraums.
- Zählprinzip: Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit $m_1, m_2, ..., m_k$ Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ Möglichkeiten.
- Beispiel: Wie viele dreistellige Zahlen kann man aus den Ziffern 3,4 und 5 bilden? Antwort: 3^3.
- Beispiel: Wie viele verschiedene Zahlen kann man aus den Ziffern 3,4 und 5 bilden?
  Antwort: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.



- Baumdiagramm
- Unter einem Laplace –Experiment versteht man ein Zufallsexperiment dessen Ergebnisse alle die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ eines Ereignisses A erhält man, in dem man die Anzahl der für A günstigen Ergebnisse durch die Gesamtzahl aller möglichen Ergebnisse teilt. Für die Anzahl der Ergebnisse in einem Ereignis A schreibt man kurz |A|.
- Beispiel zweifacher Würfelwurf: **Ω** ={(1,1),(1,2),(1,3),...(6,4),(6,5),(6,6)} mit | **Ω|=36.** Alle Ergebnisse treten gleichwahrscheinlich mit 1/36 auf.

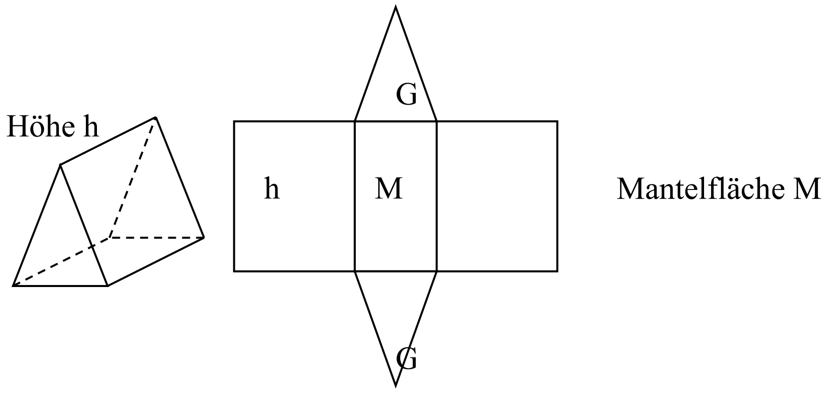
5.Raumgeometrie

5.1.Kreis

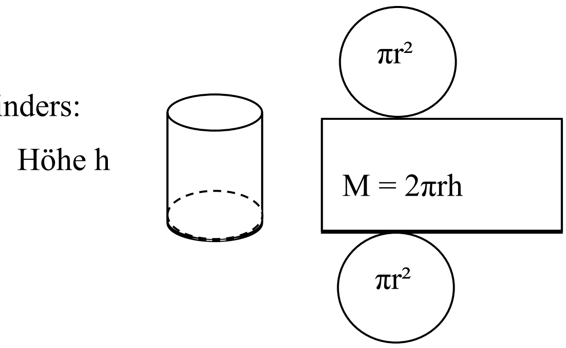
- Kreisumfang: $U = 2\pi r$
- Kreisfläche: $A = \pi r^2$

5.2. Prisma und Zylinder

- Netz des Prismas:



- Netz des Zylinders:



- Oberfläche und Volumen des Prismas: $O_P = 2 \cdot G + M$
  $V_P = G \cdot h$
- Oberfläche und Volumen des Zylinders: $O_Z = 2 \cdot G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
  $V_Z = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$