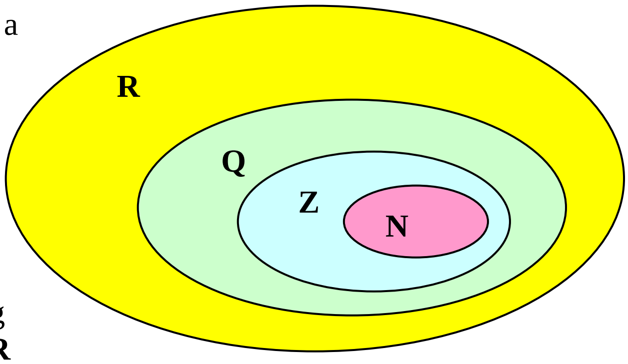
Grundwissen Mathematik 9.Klasse
Gymnasium SOB

1.Weiterentwicklung der Zahlvorstellung

- Definition der Quadratwurzel: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a}$ diejenige nicht negative Zahl deren Quadrat a ergibt. $\sqrt{a}$ heißt Quadratwurzel, a heißt Radikand.
- Beispiele: $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ $\quad \sqrt{64} = 8$
- Reelle Zahlen stellen eine Erweiterung der rationalen Zahlen dar. Diese ist nötig, da z.B. $\sqrt{2}$ nicht in **Q** liegt. Jeder unendliche nichtperiodische Dezimalbruch ist irrational, es gibt keine Bruchdarstellung für ihn, π ist irrational. Die reellen Zahlen **R** umfassen die rationalen und die irrationalen Zahlen.



- Heronverfahren: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$
- $\sqrt{a^2} = a \;\; für \; a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = -a \;\; für \; a < 0$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
- $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$
- Achtung! $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7 \neq 5 = \sqrt{25}$
- Rationalmachen des Nenners:

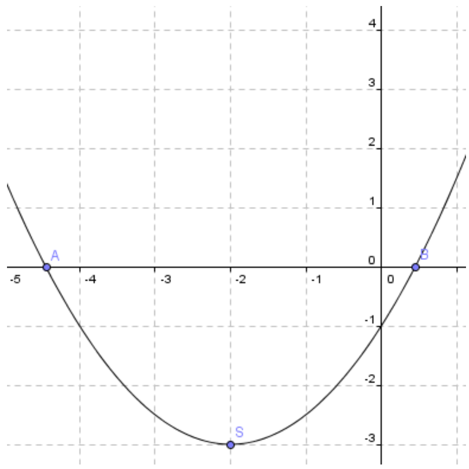
$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}$$

$$\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} = \frac{5\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)} = \frac{5\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{8-3} = \frac{5\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{5} = \left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)$$

2.Funktionale Zusammenhänge

2.1.Graphen quadratischer Funktionen und ihre Nullstellen

- 1.Binomische Formel: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- 2.Binomische Formel: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- 3.Binomische Formel: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ heißt Parabel.
- Beispiel: Graph für $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$



- Der tiefste bzw. höchste Punkt einer Parabel wird Scheitel S genannt.
- Die Stellen an denen der Graph die x – Achse schneidet heißen Nullstellen.
- Falls $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet.
- Falls $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.
- Falls $|a| > 1$ ist, erhält man eine engere Parabel.
- Falls $|a| < 1$ ist, erhält man eine weitere Parabel.

2.2.Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

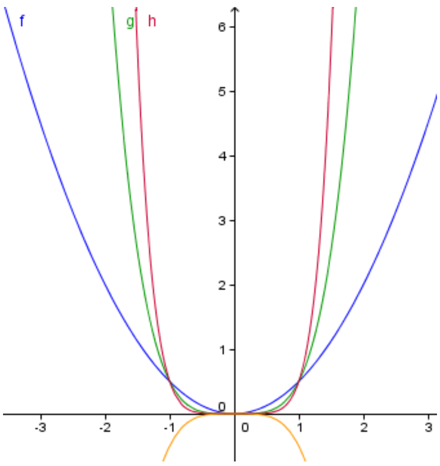
- Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ heißt quadratische Gleichung.
- Lösung durch **quadratische Ergänzung.**
- Beispiel:

$0{,}75x^2 + 4{,}5x + 3 = 0$	| 0,75 ausklammern
$0{,}75\,[x^2 + 6x + 4] = 0$	| quadratisch ergänzen
$0{,}75\,[x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 4] = 0$	| binomische Formel
$\boxed{0{,}75\,[(x + 3)^2 - 5]} = 0$	| ausmultiplizieren liefert die Scheitelpunktform
$0{,}75\,(x + 3)^2 - 3{,}75 = 0$	| Auflösen nach x
$(x + 3)^2 = 3{,}75 : 0{,}75$	
$(x + 3)^2 = 5$	
$x_1 = \sqrt{5} - 3 \quad x_2 = -\sqrt{5} - 3$	

- Aus der Scheitelpunktform $\boxed{f(x) = a(x - d)^2 + e}$ lassen sich der Scheitel S(d/e), die Verschiebung der Parabel in x – Richtung um d und die Verschiebung in y – Richtung um e direkt ablesen.
- Die Bestimmung der Nullstellen kann neben der quadratischen Ergänzung mit der **Lösungsformel** erfolgen: $\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$
- Der Radikand in der Lösungsformel wird Determinante D genannt und gibt die Anzahl der Lösungen an. Für $D > 0$ gibt es zwei Lösungen, für $D = 0$ eine Lösung und für $D < 0$ keine Lösung.

2.3.Anwendungen

- Bestimmung von Funktionstermen über lineare Gleichungssysteme
- Die Darstellungsformen **Normalform** $ax^2 + bx + c$, **Scheitelpunktform** $a(x - x_S)^2 + y_S$ und **Nullstellenform** $a(x - x_1)(x - x_2)$ mit x_1 und x_2 als Nullstellen der Parabel ineinander umwandeln und je nach Problemstellung verwenden.
- Beispiel: $x^2 + x - 6 = (x + 0{,}5)^2 - 0{,}25 = (x - 2)(x + 3)$
- Extremwertprobleme
- Schnittpunktbestimmung von zwei Parabeln, Parabel und Gerade und Gerade und Hyperbel.
- Einfache Bruchgleichungen



3.Erweiterung des Potenzbegriffs

3.1. Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

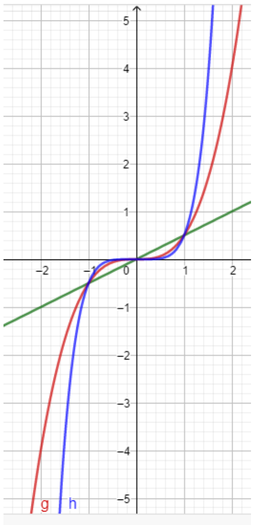
Funktionen der Form $f(x) = a\,x^n$ (n aus N) nennt man Potenzfunktionen n – ten Grades.

1.**Gerader** Exponent und **a > 0**: z.B. $f(x)=0{,}5\,x^2$; $g(x)=0{,}5\,x^4$; $h(x)=0{,}5\,x^6$;

Eigenschaften:

- Symmetrie: achsensymmetrisch zur y – Achse
- Für $x < 0$ nehmen mit wachsenden x – Werten die Funktionswerte ab, man sagt die Funktion ist streng monoton fallend. Für $x > 0$ nehmen die Funktionswerte mit wachsenden x – Werten zu, man sagt die Funktion ist streng monoton steigend.
- Wertemenge: R^+_0
- Charakteristischer Verlauf: von links oben nach rechts oben
- Für **a < 0** wird der Graph an der x-Achse gespiegelt

2.**Ungerader** Exponent und **a > 0**: z.B. $f(x)= 0,5\,x$; $g(x)= 0,5\,x^3$; $h(x)= 0,5\,x^5$;
Eigenschaften:



- Symmetrie: punktsymmetrisch zum Ursprung
- Steigung: streng monoton steigend
- Wertemenge: R
- Charakteristischer Verlauf: von links unten nach rechts oben
- Für **a < 0** wird der Graph an der x-Achse gespiegelt

3.2.n – te Wurzeln

- Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren n – te Potenz a ergibt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $\sqrt[n]{a}$ heißt **n- te Wurzel** aus a ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)
- Beispiele: $\sqrt[3]{27} = 3$
  $x^3 = -8 \rightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$
  $x^4 = 16 \rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

3.3.Potenzen mit rationalen Exponenten

- Definition: Für positive Basen gilt: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ $\quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ $\quad a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$
- Rechenregeln für r und s aus **Q** und a und b aus **R**$^+$:

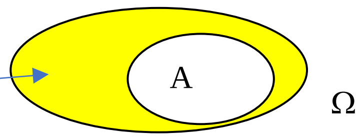
$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad a^r : a^s = a^{r-s} \quad \left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s} \quad a^r \cdot b^r = (ab)^r \quad a^r : b^r = (a:b)^r$$

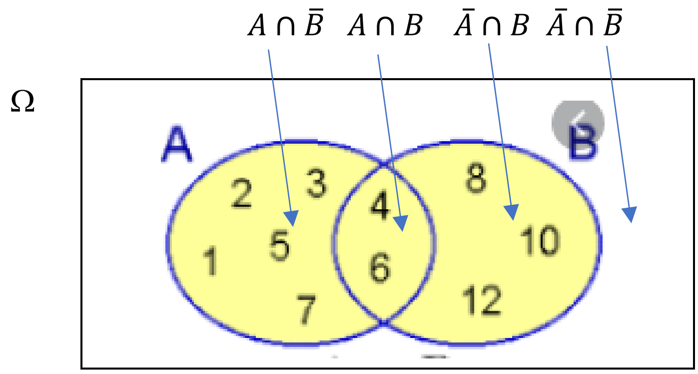
4.Stochastik

Ein Ereignis A ist eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω: $A \subset \Omega$.
Zwei Ereignisse A und B können verknüpft werden. Wichtige Verknüpfungen sind Schnittmenge und Vereinigungsmenge.
In der Schnittmenge $A \cap B$ sind alle Elemente die in A **und** B enthalten sind.
Beispiel: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7,8\}$ $A \cap B = \{4,5\}$
In der Vereinigungsmenge AUB sind alle Elemente, die **mindestens** in einer der beiden Mengen enthalten sind: AUB = {1,2,3,4,5,6,7,8}

Verknüpfung von Ereignissen

Folgende Übersicht veranschaulicht die Ereignisse sowie deren Verknüpfungen in einer Vierfeldertafel und im Mengendiagramm:Gegenereignis zu A: $\bar{A}$





Zwei Ereignisse heißen unvereinbar oder disjunkt wenn ihre Schnittmenge leer ist.
$A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}$ sind also disjunkt und bilden in ihrer Vereinigungsmenge Ω, man nennt sie eine Zerlegung von Ω.

Die Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

Sie bietet einen guten Überblick über die absoluten Häufigkeiten zweier Ereignisse A und B und deren Schnittmengen
Beispiel: In einer Klasse mit 30 Schülern sind 21 Mädchen und 9 Jungen. Es gibt unter den Mädchen 7 Brillenträgerinnen, insgesamt tragen 14 Schüler eine Brille.
Ereignis M: Mädchen
Ereignis B: Brillenträger
Darstellung in absoluten Häufigkeiten:

	M	$\overline{M}$	
B	7	**7**	14
$\overline{B}$	**14**	**2**	**16**
Summe	21	9	30

Die fehlenden rot eingetragenen Werte für die Schnittmengen erhält man einfach durch Addition bzw. durch Subtraktion der entsprechenden Werte.

Die Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

Sie bietet einen guten Überblick über die relativen Häufigkeiten H(A) und H(B), bzw. die Wahrscheinlichkeiten P(A) und P(B) zweier Ereignisse A und B und deren Schnittmengen.

Voriges Beispiel:

Darstellung in relativen Häufigkeiten bzw Wahscheinlichkeiten:

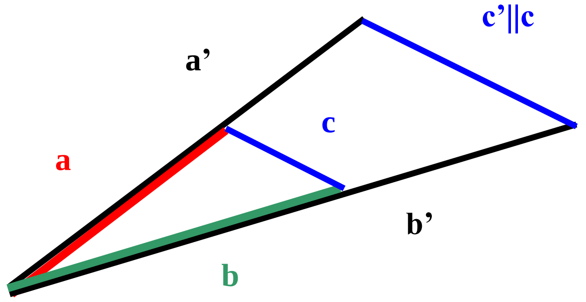
	M	$\overline{M}$	
B	7/30	**7/30**	14/30
$\overline{B}$	**14/30**	**2/30**	**16/30**
Summe	70%	30%	100%

Die Angabe der Wahrscheinlichkeiten kann in Prozent oder in Brüchen erfolgen
Aus der Vierfeldertafel lässt sich die Beziehung $P(M) + P(B) - P(M \cap B) = P(M \cup B)$ erkennen. Im Beispiel: 70% $+ \frac{14}{30} - \frac{7}{30} = \frac{14}{30} + \frac{7}{30} + \frac{7}{30} = \frac{14}{15}$

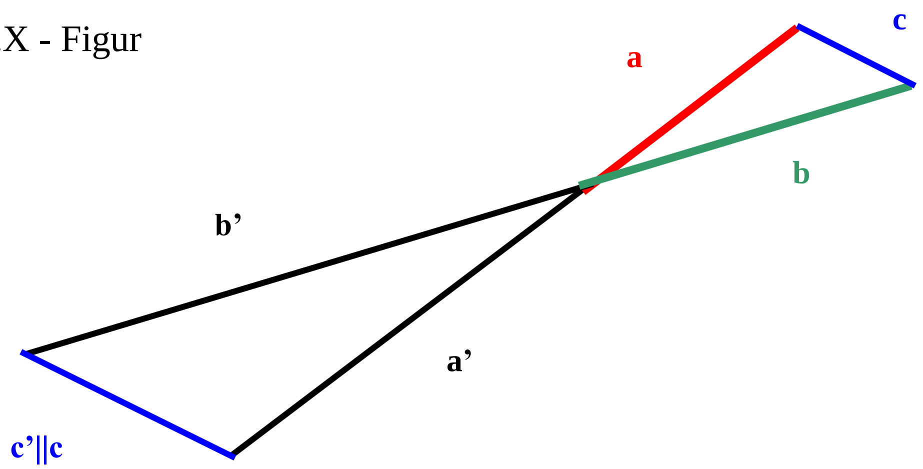
5.Strahlensatz und Ähnlichkeit

5.1.V - Figur

- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ $\quad \frac{a}{a'-a} = \frac{b}{b'-b}$



5.2.X - Figur

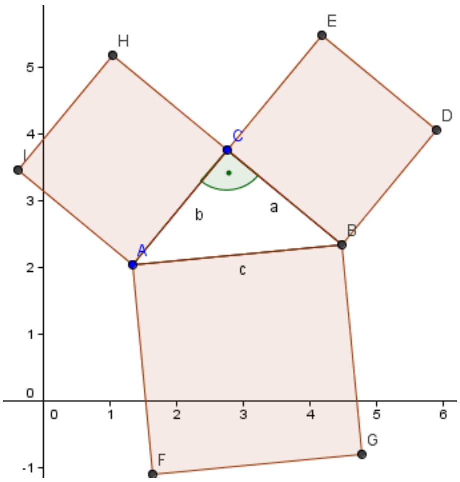


- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ $\qquad \frac{a}{a'+a} = \frac{b}{b'+b}$

5.3.Ähnlichkeit

- Zwei Figuren F und G sind ähnlich wenn man G bzw. F so vergrößern oder verkleinern kann, dass die beiden Figuren kongruent sind.
- Für ähnliche Figuren gilt, dass entsprechende Seiten das gleiche Längenverhältnis haben.
- Für ähnliche Figuren gilt, dass entsprechende Winkel gleich groß sind.
- Sind die Seitenlängen der Figur K k-mal so lang wie die entsprechenden Seiten der Figur F, so hat K den k^2 - fachen Flächeninhalt, das Volumen eines Körpers ändert sich mit dem Faktor k^3.

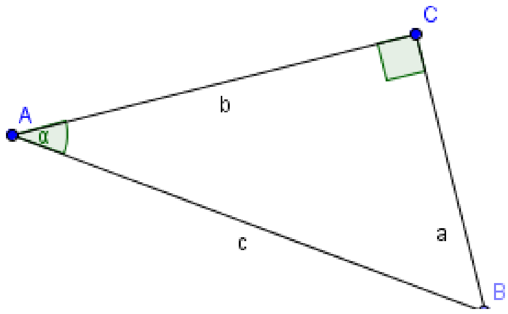
6.Der Satz des Pythagoras



- **Satz des Pythagoras:** In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$
- Kehrsatz zum Satz des Pytagoras: Wenn in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.
- Diagonale d im Quadrat mit der Seitenlänge a: $d = \sqrt{2}a$
- Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a: $h = \sqrt{3}\frac{a}{2}$
- Raumdiagonale d im Würfel mit der Seitenlänge a: $d = \sqrt{3}a$

7.Trigonometrie

7.1. Winkel zwischen 0 und 90°



- $\sin\alpha = \dfrac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Hypotenuse}} = \dfrac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\textit{Ankathete von } \alpha}{\textit{Hypotenuse}} = \dfrac{b}{c}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\textit{Gegenkathete von } \alpha}{\textit{Ankathete von } \alpha} = \dfrac{a}{b}$
- $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha);\quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha);\quad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- Besondere Werte:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

7.2. Erweiterung auf Winkel zwischen 0 und 360°

sin (180° - α) = sin α
cos (180° - α) =- cos α
tan (180° - α) =- tan α

sin (180°+ α) = -sin α
cos (180°+ α) =- cos α
tan (180° + α) = tan α

sin (360° - α) = - sin α
cos (360° + α) = cos α
tan (360° - α) =- tan α

Die Vorzeichen von sin, cos und tan sind in den einzelnen Quadranten:

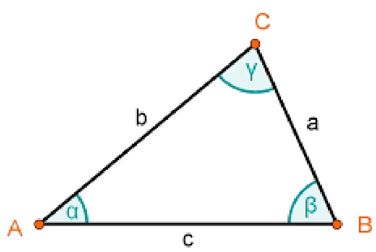
	1.Quadrant	2.Quadrant	3.Quadrant	4.Quadrant
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tan α	+	-	+	-

Bsp: α = 240°, der zweite Schenkel liegt also im 3. Quadranten,

d.h: sin 240° = sin (180° + 60°) = -sin 60° = $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

Es ist außerdem üblich Drehungen im Uhrzeigersinn durch negative Winkel zu beschreiben.
Also -30° = +330°!

7.3. Sinussatz und Kosinussatz im beliebigen Dreieck



Sinussatz: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\qquad \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\qquad \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc*\cos\alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac*\cos\beta$
$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba*\cos\gamma$

Mit dem Kosinussatz berechnen wir die dritte Seite in einem beliebigen Dreieck, wenn zwei Seiten und der Zwischenwinkel gegeben sind. Der Satz des Pythagoras ist ein Spezialfall des Kosinussatzes.